2 ع ت — المعادلات التفاضلية

1. المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى

تعريف : (المعادلة $y' = ay$)

ليكن a عددا حقيقيا . المعادلة $y' = ay$ ذات المجهول الدالة العددية y قابلة للاشتقاق على R تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى .

ملاحظة :

اذا كان $a = 0$ فان المعادلة تصبح $y' = 0$ و بالتالي y دالة ثابتة .

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay$)

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هو $y = \alpha e^{ax}$ حيث $\alpha \in R$

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay$ بشرط بدئي)

ليكن a و x_0 و β اعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

النظمة $\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = \beta \end{cases}$

تقبل حلا وحيدا وهو $y = \beta e^{a(x-x_0)}$

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay + b$)

ليكن a و b اعداد حقيقية غير منعدمة .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $y = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$

حيث $\alpha \in R$

2. المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية :

تعريف : (المعادلة $y'' + ay' + by = 0$)

ليكن a و b عددين حقيقيين . المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ ذات المجهول الدالة العددية y قابلة للاشتقاق مرتين على R تسمى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية .

ملاحظة :

اذا كان $b = 0$ و $a \neq 0$

فان المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ تصبح $z' + az = 0$ حيث $z = y'$ و بالتالي نعود الى حلول المعادلة من الدرجة الاولى .

اذا كان $b = 0$ و $a = 0$ فان المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ تصبح $y'' = 0$ و بالتالي $y = \alpha x + \beta$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

خاصية : (حل المعادلة $y'' + ay' + by = 0$)

ليكن a و b عددين حقيقيين . حيث $b \neq 0$

نعتبر المعادلة $y'' + ay' + by = 0$.

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ حيث r عدد عقدي تسمى معادلتها المميزة

ليكن Δ مميز هذه الاخيرة .

اذا كان $\Delta \succ 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 r_2 والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الدوال العددية $y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

اذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلا مزدوجا r والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الدوال العددية $y = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

اذا كان $\Delta \prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $p + iq$ و $p - iq$ والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الدوال $y = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

حالات خاصة :

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y'' - \omega^2 y = 0$ هو $y = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

الحل العام للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ هو $y = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$.